1. [[1]](#footnote-0)Определения компьютерной алгебры

**Компьютерная алгебра** — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре. При этом ответ на вопрос о том, относится ли конкретная задача к компьютерной алгебре, часто зависит от склонностей специалиста.

**Компьютерная алгебра** занимается разработкой и реализацией аналитических методов решения математических задач на компьютере и предполагает, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в аналитическом (символьном) виде

1. [[2]](#footnote-1)Классификация математических объектов КА

* Числа (целые, рациональные, алгебраические, комплексные)
* Математические выражения(арифметика, функции, производные, интегралы, матрицы, уравнения).
* Массивы (разрядность представления чисел–постоянная), (тип представления–не масштабируемое) (способ доступа к элементу–прямой(по индексу))
* Последовательность (разрядность представления чисел–переменная)(тип представления–масштабируемое)(способ доступа к элементу–последовательный(по указателям))
* Списки (разрядность представления чисел–переменная) (тип представления–масштабируемое) (способ доступа к элементу–последовательный (по указателям)) (способ изменения разрядности–встроенный)

1. [[3]](#footnote-2)Представление математических объектов компьютерной алгебры

**Представление целых чисел.**

В сист. рассматриваются точные аналит. преобраз-я и никакие округления или др. искажения целых чисел недопустимы. Необходимо рассматривать целые числа произвольной длины. Для представления выбирают в качестве основания некоторое число N и представляют числа, по аналогии с обычной десятичной сист.,отн-но этого основания (с помощью цифр от 0 до N-1) с добавлением знакового бита. Н-р, на 32-битовых компьютерах можно выбрать в качестве N 109, или 230, или 231.

**Представление дробей.**

Обыкновенные дроби представляются в виде пары целых чисел: числителя и знаменателя (p/q,q≠0). Не нужно их заменять приближенными значениями с плавающей точкой. Н-р: умножение дробей a/b и c/d, представленных в несократимом виде: . НОД (a,d); НОД (b,c); a’=a/НОД(a,d); b’=b/НОД(b,c); c’=c/НОД(b,c); d’=d/НОД(a,d); p=a’c’; q=b’d’.

**Представление полиномов.**

Все сист. могут работать с полиномами произв. числа переменных. Их можно +,-,\*,/, операция упрощения. Представление матем. объектов (полиномов) наз-ся каноническим, если две различные записи соответствуют всегда двум различным объектам. Представление наз-ся нормальным, если представление нуля моноида единственно. Представление наз-ся разреженным, если нулевые члены явно в нем не представлены. (мы пишем 8x3+7 вместо 8x3+0x+7) Представление наз-ся плотным, если в нем явно представлены все члены. Наиболее очевидным компьютерным представлением полинома anxn+an-1xn-1+…+a1x+a0 явл-ся его представление таблицей коэффициентов [an,an-

1,…,a0].-плотное представление.

**Представление рациональных ф-ций.**

Большинство вычислений используют не только полиномы, но и их отношения, т.е.

рациональные ф-ции. Если представить рацион. ф-цию как полином (числитель), деленный на другой полином (знаменатель), то получается нормальное представление, т.к. ф-ция есть нуль тогда и только тогда, когда ее числитель есть нуль. Естественно потребовать, чтобы в канон. представлении не существовало какого-либо общего делителя числителя и знаменателя. В общем случае приходим к представлению с минимально возможной степенью числителя (или знаменателя). Правила для рацион. ф-ций: 1.-в выражении не д.б. рацион. коэфф-тов; 2.-никакое целое число не может делить как числитель, так и знаменатель; 3.- старший коэфф-т знаменателя выражения д.б. положительным.

**Представление алгебраич. ф-ций.**

Под алгебраич. объектами (числами и ф-циями) понимают реш-е полиномиальных ур-ий. Н-р,

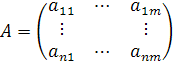
- алгебраич. число, как реш-е ур-я x2-3=0. Различают три класса алгебраич. выраж-й: 1.- простые

радикалы (н-р, ). Две проблемы – однозначность представления (н-р,,

ее универсальное реш-е очень сложно) и взаимная зависимость радикалов – корни различных степеней могут выражаться один через др. (рассмотрим , тогда, т.к. x4+4=(x2-2x+2)\*(x2+2x+2),

то получаем ); 2.- вложенные радикалы (н-р, ). Две проблемы однозначности и соотношение между радикалами (н-р, ); 3.- общие алгебраич. выраж-я (н-р, алгебраич. число γ, определенное ур-ем γ5+γ+1=0). Требуется, чтобы полиномы, определяющие алгебраич. числа и ф-ции, были неприводимыми (неразложимыми).

**Представление матриц.**

Матрица имеет вид , где aij-некот. аналитич. выраж-я, i=1,…, n; j=1,…,m. Или A=(aij)n,m. Если n и m – заданные явно натур. числа, то и запись матрицы м.б.

конкретной. Если в записи матрицы присутствует только правая часть, то такое представление наз-ся явным. Если запись матриц осуществлена в односимвольном виде, т.е. левой частью (А), то такое представление наз-ся неявным. Плотные матрицы. Это матрицы с большим кол-вом ненулевых элтов. Представляются в виде прямоугольной табл. или массива. Алгоритм Барейса. Барейс предложил семейство методов исключения без использования дробей, т.е. таких, где все необходимые деления выполняются точно. Разреженные матрицы. Методы запоминания разреженных матриц с символьными эл-тами аналогичны методам запоминания различных полиномов; можно использовать списки вида {(aij,i,j)}, где aij-знач-е эл-та (аналит. выраж-е), i,j-номер строки и столбца, указывающие положение этого эл-та в матрице.

1. [[4]](#footnote-3)Понятие алгебраической функции

Алгебраическая функция — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

1. [[5]](#footnote-4)Классификация алгебраических функций

**Пропорциональные величины**. Если переменные y и x прямо пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением: y = k x

**Линейная функция**. Если переменные y и x связаны уравнением 1-ой степени: A x + B y = C

**Обратная пропорциональность**. Если переменные y и x обратно пропорциональны, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением: y = k / x

**Квадратичная функция**. Это функция: y = ax 2 + bx + c, где a, b, c - постоянные, a 0. В простейшем случае: b = c = 0 и y = ax 2. График этой функции квадратная парабола - кривая, проходящая через начало координат.

**Степенная функция**. Это функция: y = axn, где a, n – постоянные. При n = 1 получаем прямую пропорциональность: y = ax; при n = 2 - квадратную параболу ; при n = -1 - обратную пропорциональность или гиперболу. Таким образом, эти функции - частные случаи степенной функции.

**Показательная функция.** Функция y = ax, где a - положительное постоянное число, называется показательной функцией. Аргумент x принимает любые действительные значения; в качестве значений функции рассматриваются только положительные числа, так как иначе мы имеем многозначную функцию

**Логарифмическая функция**. Функция y = log a x, где a – постоянное положительное число, не равное 1, называется логарифмической. Эта функция является обратной к показательной функции;

**Тригонометрические функции**. При построении тригонометрических функций мы используем радианную меру измерения углов. Тогда функция y = sin x представляется графиком - синусоидой.

1. [[6]](#footnote-5)Представление матриц в КА

Представление матриц представляет собой метод , используемый компьютером языка для хранения матрицы более чем в одном измерении в памяти . Fortran и C используют различные схемы для своих родных массивов. Fortran использует «Колонка Major», в котором все элементы для данного столбца хранятся в памяти непрерывно. С использует «Row Major», который хранит все элементы для данной строки в памяти непрерывно. LAPACK определяет различные матричные представления в памяти. Существует также разреженное представление матрицы и матрица представление Мортона порядка . Согласно документации, в LAPACK унитарная матрица представление оптимизируется. Некоторые языки , такие как Java - матрицы хранения с использованием векторов Iliffe . Они особенно полезны для хранения нерегулярных матриц . Матрицы имеют первостепенное значение в линейной алгебре .

Возможно представлять матрицу в программе как двумерный массив - естественное представление матрицы. Но при условии динамического размещения в памяти ее представление уже не такое простое. Возможны три варианта размещения в памяти и представления матрицы в программе.

1. Матрица является одномерным массивом и для того, чтобы по номеру строки (L) и столбца (R) определить индекс в одномерном массиве (N) следует выполнить вычисление: N=L\*S+R.
2. Память для данных матрицы выделяется так же, как и в предыдущем случае. Но дополнительно выделяется память для одномерного массива размерности S, элементы которого имеют тип int\* (указатель на целое). Указатель на начало этого массива имеет тип int\*\* (указатель на указатель на целое). В элементы этого массива записываются указатели на начала соответствующих строк в массиве данных матрицы. В этом варианте можно обращаться к данным матрицы, указывая номера строки и столбца как два индекса в массиве указателей.
3. Третий вариант отличается от предыдущих тем, что для каждой строки матрицы память выделяется отдельно (S областей памяти по S элементов в каждой), и в массив указателей заносятся указатели на соответствующие области. Таким образом, матрица необязательно занимает смежные области памяти. Можно обращаться к данным матрицы, указывая два индекса. Выделение памяти (и соответственно - освобождение) нужно выполнять в цикле.

Вариант 1 обеспечивает экономию памяти, а варианты 2 и 3 - возможность "естественного" обращения к элементам матрицы. Вариант 3 позволяет рациональнее использовать память, чем вариант 2, но вариант 2 алгоритмически более простой. Мы покажем реализации алгоритма для вариантов 1 и 3.

1. [ссылка 1](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F) [ссылка 2](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/308929) [↑](#footnote-ref-0)
2. [ссылка 1](http://docplayer.ru/57654492-Kompyuternaya-algebra-kurs-lekciy-igor-alekseevich-malyshev.html) [↑](#footnote-ref-1)
3. [ссылка 1](https://studfile.net/preview/2975741/page:24/) [↑](#footnote-ref-2)
4. [ссылка 1](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) [↑](#footnote-ref-3)
5. [ссылка 1](http://www.bymath.net/studyguide/fun/sec/fun9.htm) [↑](#footnote-ref-4)
6. [ссылка 1](https://studopedia.ru/9_116092_predstavlenie-matritsi-v-pamyati.html) [ссылка 2](https://ru.qwe.wiki/wiki/Matrix_representation) [↑](#footnote-ref-5)